ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1986

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION P'

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHS II – P'

Dans tout le problème, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des réels ; on appelle algèbre sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ un espace vectoriel E défini sur $\mathbb{C}$ muni d'une application bilinéaire de $E \times E$ dans E appelée multiplication. Pour tout entier $k \geq 1$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction complexe f définie sur $\mathbb{R}$ et $f^{(o)}$ désigne la fonction f elle-même. Pour simplifier l'écriture, on pourra désigner par f' et f" respectivement les dérivées première et seconde de f. C^∞ est l'espace vectoriel des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, indéfiniment dérivables ; C^∞ est une algèbre. $\mathcal{S}$ est le sous-espace vectoriel de C^∞ *constitué des fonctions f de* C^∞ *telles que :*

$$\forall \ (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ , \quad \lim_{|x| \to +\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Soient U, V, H les applications de C^∞ dans lui-même définies par :

$$(Uf)(x) = x\ f(x) + f'(x) \ ,$$
$$(Vf)(x) = x\ f(x) - f'(x) \ ,$$
$$(Hf)(x) = x^2\ f(x) - f''(x) \ ,$$

L'objet du problème est l'étude et la détermination des valeurs propres et des fonctions propres de l'application linéaire H.

PARTIE I

1°) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de C^∞ est une sous-algèbre de C^∞ non réduite à $\{0\}$. Démontrer que les applications U, V, H sont des endomorphismes de $\mathcal{S}$ et exprimer l'application composée V U en fonction de H et de l'application identité Id.

2°) Démontrer la propriété : soit f une fonction de $\mathcal{S}$; pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe un réel positif $M_{p,q}$, dépendant de f, tel que :

$$\forall \ x \in \mathbb{R} \ , \quad |x^p \ f^{(q)}(x)| \leq M_{p,q}\ (1 + x^2)^{-1} \ .$$

3°) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Prouver que les fonctions $x \mapsto f(x)^2$, $x \mapsto f(x).g(x)$ ont des intégrales absolument convergentes sur toute la droite $\mathbb{R}$. En déduire que l'application de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$(f,g) \mapsto \ < f,\ g > = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\ g(x)\ dx \ ,$$

fait de $\mathcal{S}$ *un espace préhilbertien complexe.* Soit $||f||$ la norme de l'élément f dans cet espace.

Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; en déduire une relation entre les intégrales :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\ g(x)\ dx \ ; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\ dx \ ; \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\ dx.$$

4° - Démontrer les relations : $\forall \ (f,g) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$

$$< Uf,\ g > = < f,\ Vg > \quad ; \quad < Vf,\ g > = < f,\ Ug > \quad ; \quad < Hf,\ g > = < f,\ Hg >.$$

En déduire que, si les valeurs propres de l'endomorphisme H, défini dans $\mathcal{S}$, existent, elles sont réelles.

PARTIE II

Soit t un réel quelconque ; soit u_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_t(x) = a(t)\ \exp(tx - \frac{x^2}{2}) \quad ,$$

a(t) est un réel positif ; $u \mapsto \exp u$ est la fonction exponentielle de base e.

1° - Prouver que la fonction u_t appartient à $\mathcal{S}$ et déterminer le coefficient a(t) de façon que la norme de u_t dans $\mathcal{S}$ soit égale à $\exp(t^2/4)$ en supposant connu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\ x^2)\ dx = \sqrt{\pi} \ .$$

Exprimer $(Uu_t)(x)$, $(Vu_t)(x)$ en fonction de t, x et $u_t(x)$.

On suppose, dans toute la suite du problème, que la norme de u_t est égale à $\exp(t^2/4)$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

Concours commun Mines-Ponts-Telecom.
Math 2.Option P'

2° - Soit f une fonction de $\mathcal{S}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x).\exp(tx - x^2/2)$ a, pour toute valeur de t, une intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$. Soit Lf la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(Lf)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)\, f(x)\, dx.$$

Calculer Lu_o ; montrer les propriétés suivantes :

. $(Lf)(t) = < u_t, f >$.

. $(LVf)(t) = t.(Lf)(t)$; LV désigne la composée des applications L et V.

. La fonction $t \mapsto (Lf)(t).\exp(- t^2/4)$ est une fonction bornée.

3° - Soit f une fonction de $\mathcal{S}$; désignons par F, G, F_n , n = 1, 2, ... les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2})\, dx \ ; \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2})\, dx \ ;$$

$$F_n(t) = \int_{-n}^{n} f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2})\, dx, \ n = 1, 2, \ldots \ ;$$

Prouver que la fonction F_n est continûment dérivable. Montrer que, sur tout intervalle $[- A, A]$ $(A > 0)$, la suite des fonctions F'_n converge uniformément vers la fonction G et de même la suite des fonctions F_n vers F. En déduire quelle est la dérivée de la fonction F.

4° - En déduire :

$$\forall \ f \in \mathcal{S}, \qquad (Lf)' = \frac{1}{2} \ LUf.$$

Démontrer que L est une application linéaire de $\mathcal{S}$ dans C^∞.

5° - Exprimer LHf en fonction de Lf et de (Lf)'.

PARTIE III

Soit h_n, n = 0, 1, 2, ... les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_o(x) = \exp(- \frac{x^2}{2}) \ ; \quad h_n = V^n h_o , \quad n = 1, 2, \ldots$$

V^n désigne la composée de V avec elle-même n fois ; V^o l'identité.

1° - Calculer Lh_n , n = 0, 1, 2, ...

2° - Soit f une fonction de $\mathcal{S}$; montrer que la nullité de la fonction Lf entraîne la nullité de chacune des fonctions Lg_n, où g_n est la fonction $x \mapsto x^n f(x)$, n = 0, 1, 2, ... $(x^o = 1)$ et qu'il y a par suite équivalence.

Soit Ph_o la fonction $x \mapsto P(x)\, h_o(x)$, où P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que la nullité de la fonction $L(Ph_o)$ entraîne la nullité du polynôme P.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$:

$$E = \{ f \mid \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = P(x)\, h_o(x),\ P \in \mathbb{C}\,[X] \}.$$

Montrer que l'application L est injective de E dans C^∞.

3° - Déterminer les valeurs du réel λ pour que l'équation différentielle :

$$2\, ty'(t) + y(t) = \lambda\, y(t)$$

admette une solution autre que la solution banale dans l'espace C^∞.

En déduire que les seules fonctions propres de l'endomorphisme H, qui appartiennent à E, sont les fonctions h_n (à un facteur près) associées aux valeurs propres 2n + 1, n = 0, 1, 2, ...

4° - Dans cette question, l'application L est supposée injective de $\mathcal{S}$ dans C^∞. Démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres et fonctions propres que celles obtenues précédemment.